



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

**ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY**

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

**STANOVENÍ GEOMETRICKÝCH CHARAKTERISTIK
ZAKŘIVENÉHO PRUTU**

DETERMINATION OF GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF CURVED BEAM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Jakub Foukal

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Marek Benešovský

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Jakub Foukal**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Marek Benešovský**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Stanovení geometrických charakteristik zakřiveného prutu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

V libovolném programovacím jazyku napište program, jehož úkolem bude určit geometrické charakteristiky zakřiveného prutu. Mezi tyto můžeme řadit: lineární momenty, kvadratické momenty, deviační momenty, hlavní kvadratické momenty atd.

Cíle bakalářské práce:

1. Provést rešerši literatury se zaměřením na geometrické charakteristiky.
2. Napsat program pro určování geometrických charakteristik.

Seznam doporučené literatury:

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J., BURŠA, J.: Mechanika těles, PPI. Skriptum VUT v Brně, CERM, 2004.

FLORIAN, Z., ONDRÁČEK, E., PŘIKRYL, K.: Mechanika těles, Statika. Vyd. 7., Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3440-0.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Závěrečná práce se zabývá tvorbou algoritmů pro stanovení geometrických charakteristik zakřiveného prutu. V první části je z odborné literatury proveden výčet vztahů, jejichž modifikované tvary jsou dále použity k implementaci algoritmů. Další část se pak zabývá implementováním dvou metod pro stanovení křivosti tyče a srovnáním získaných výsledků z těchto metod. Závěrečná část je věnována algoritmu pro výpočet průřezových charakteristik z libovolného grafického formátu. Algoritmus průřezových charakteristik je ověřen analytickým řešením.

Abstract

This bachelor thesis focuses on creating a algorithm for determining geometric characteristics of curved beam. In the first part, formulas are taken from technical literature. These formulas are then modified and used for implementation of algorithms. In the following section, there are two algorithms for determining the curvature of a curved beam and comparison between their calculated values. The concluding part focuses on an algorithm for calculating the cross-section characteristics from random image format. The algorithm of cross-section characteristics is analytically verified.

Klíčová slova

Geometrické charakteristiky, průřezové charakteristiky, Matlab, zakřivené pruty, Greenova věta

Keywords

Geometric characteristics, cross section characteristics, Matlab, curved beams, Green's theorem

Bibliografická citace

FOUKAL, J. *Stanovení geometrických charakteristik zakřiveného prutu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 42 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Marek Benešovský.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma „Stanovení geometrických charakteristik zakřiveného prutu“ vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

20. května 2017

.....
Jakub Foukal

Poděkování

Tímto bych chtěl poděkovat Ing. Marku Benešovskému za cenné rady a připomínky při vypracování bakalářské práce.

Obsah

1	Úvod.....	10
2	Cíl práce.....	11
3	Prut.....	12
3.1	Rozdělení prutů podle geometrie.....	12
4	Geometrické charakteristiky	14
4.1	Nezávislé průřezové charakteristiky	14
4.2	Závislé průřezové charakteristiky	15
4.3	Transformace souřadnic	17
4.3.1	Posunuté osy	17
4.3.2	Natočené osy.....	19
5	Výpočet průřezových charakteristik mnohoúhelníku	22
5.1	Obsah.....	23
5.2	Lineární moment.....	24
5.3	Kvadratické momenty	25
6	Matlab	28
7	Stanovení křivosti prutu.....	29
8	Stanovení průřezových charakteristik z obrázku	31
9	Závěr.....	33
10	Seznam použité literatury	34
11	Seznam použitých zkratk a symbolů	35
12	Seznam příloh	36

1 Úvod

S geometrickými charakteristikami se setkáváme každý den, i když o tom nemusíme vůbec vědět. Používají se často při snímání kamerou v různých odvětvích lidské aktivity. Případy z každodenního života lze nalézt například při překročení dovolené rychlosti, kdy se na světelné tabuli rozbliká SPZ přestupku páchajícího auta, nebo když při focení sám fotoaparát detekuje obličej a zaostří na něj, a dokonce i na letištích při pasových kontrolách.

V technických odvětvích se využívají geometrické charakteristiky kupříkladu ke 3D skenování, kdy se na skenovaný předmět nalepí barevná kolečka a při snímání předmětu se kolečka pod úhlem projeví jako elipsy. Zjednodušeně řečeno pak po přepočtení geometrických charakteristik může skenovací zařízení zjistit úhel sklopení povrchu, a následně vytvořit model předmětu.

V této bakalářské práci je vysvětleno, co vlastně geometrické charakteristiky jsou, a jak je získáme. Ve stručnosti je představen program, ve kterém jsou nakonec vytvořeny skripty s algoritmy, které vypočítávají křivost prutu a z obrázku zjistí základní geometrické charakteristiky. Hlavním záměrem pro tvorbu těchto skriptů je možnost dalšího použití pro snímání mírně křivých tyčí při procesu rovnání.

2 Cíl práce

Hlavním cílem této práce je provést rešerši odborné literatury se zaměřením na geometrické charakteristiky. Dále pak napsat program na výpočet křivosti střednice prutu a program na stanovení průřezových charakteristik ze zadaného obrázku.

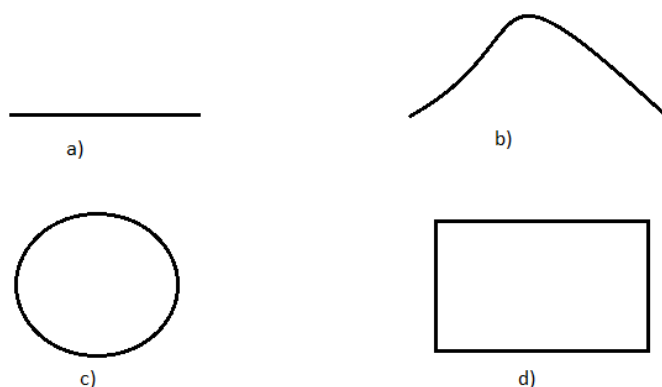
3 Prut

Tato kapitola je zpracována podle [1].

Prut je teoretickým modelem tělesa nejjednoduššího typu. Aby se jednalo o prut, musí splňovat několik kritérií: Jedná se o jednorozměrný model zadaný střednicí, která musí být spojitá a konečná. V každém bodě střednice je kolmý průřez, který je vyznačen souvislou oblastí a ohraničen křivkou. Síly a silové dvojice působí na střednici a vazby omezují jen pohyb a natočení střednice. Při deformačním procesu zůstává střednice spojitá.

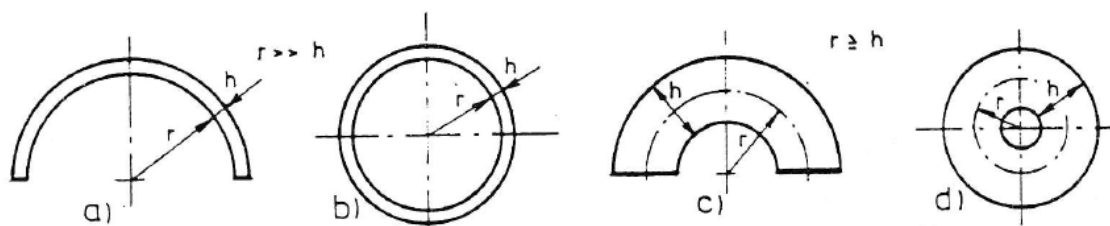
3.1 Rozdělení prutů podle geometrie

- a) Podle křivosti střednice
 - Přímé pruty (obr. 3.1 a)
 - Křivé pruty – rovinné/prostorové (obr. 3.1 b)
- b) Podle uzavřenosti střednice
 - Otevřené (obr. 3.1 a, b)
 - Uzavřené (obr. 3.1 c, d)
- c) Podle hladkosti střednice
 - Pruty s hladkou střednicí (obr. 3.1 b, c)
 - Pruty s body nespojitosti v hladkosti střednice (obr. 3.1 d)



Obr. 3.1 Příklady prutů

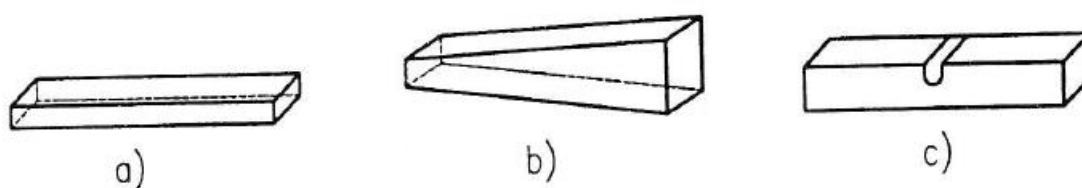
- d) Podle poměru poloměru zakřivení ku rozměru průřezu
 - Slabě zakřivené pruty (obr. 3.2 a, b)
 - Silně zakřivené pruty (obr. 3.2 c, d)



Obr. 3.2 Slabě a silně zakřivené pruty. Převzato z [1]

e) Podle proměnnosti průřezu podél střednice

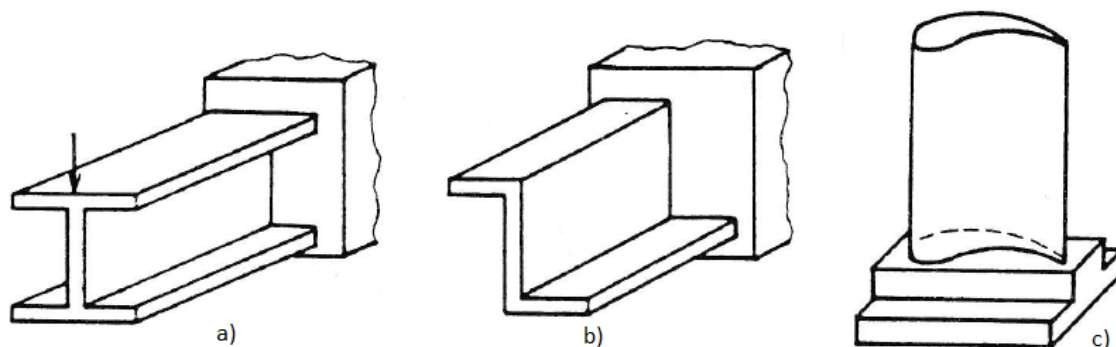
- Konstantního průřezu (obr. 3.3 a)
- Proměnného průřezu (obr. 3.3 b, c)



Obr. 3.3 Proměnnost průřezu podél střednice. Převzato z [1]

f) Podle tvaru příčného průřezu

- Elementární pruty (obr. 3.3 a)
- Profily (obr. 3.4 a, b)
- Pruty obecného příčného průřezu (obr. 3.4 c)



Obr. 3.4 Profily a prut obecného průřezu. Převzato z [1]

g) Podle symetrie střednice

- Nesymetrické (obr. 3.1 b)
- Symetrické (obr. 3.1 a, d)
- Rotačně symetrické (obr. 3.1 c)

4 Geometrické charakteristiky

Tato kapitola je zpracována podle [1] a [2].

Prut v pružnosti a pevnosti je charakterizován jako jednorozměrný model, který je určen střednicí a kolmým průřezem. Každý průřez má své charakteristické veličiny, které se dále používají ve stanovení napětí a deformace. Jelikož se jedná o veličiny v průřezu, nazývají se průřezové charakteristiky. Každý průřez je určen rovinnou uzavřenou křivkou, která odpovídá obrysu. Průřezové charakteristiky se dají dělit do dvou skupin podle závislosti na souřadnicovém systému: nezávislé na souřadnicové soustavě a závislé na souřadnicové soustavě. [1]

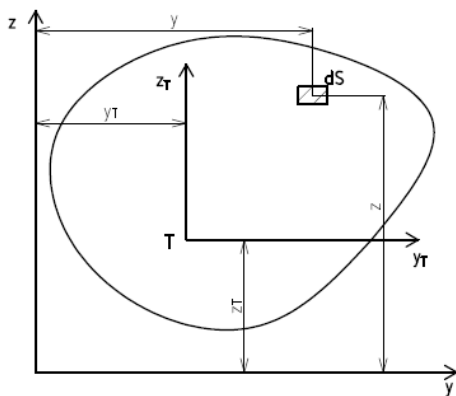
4.1 Nezávislé průřezové charakteristiky

a) Obsah

Je definován vztahem:

$$S = \iint_S dS, \quad (4.1)$$

kde pro obsah dS odpovídá vztah $dS=dy*dz$.



Obr. 4.1 Obsah průřezu

b) Těžiště

Na každý bod tělesa působí tíha zemské přitažlivosti, a to svisle dolů. Výslednice sil od všech bodů tělesa působené tíhou leží na těžnici. Při otočení tělesa se změní i směr výslednice, tím pádem i směr těžnice tělesa. Průsečík všech těžnic tělesa je těžiště. V homogenním tíhovém poli je těžiště zároveň i hmotnostní střed tělesa a je i působištem tíhové síly.

Pro výpočet těžiště platí vztah:

$$y_T = \frac{\int y \, dS}{S}, \quad (4.2)$$

pro z_T dostáváme analogický vztah:

$$z_T = \frac{\int z \, dS}{S}. \quad (4.3)$$

Těžiště se dá vypočítat i pomocí lineárních momentů (4.7).

Při určování těžiště tělesa složeného z několika jednoduchých obrazců, u kterých známe polohu těžiště, můžeme použít vztah:

$$y_T = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{m}, \quad (4.4)$$

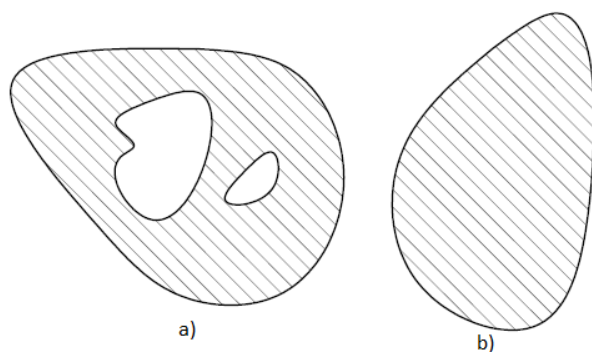
kde y_i je poloha těžiště i -tého obrazce, m_i jeho hmotnost a m hmotnost celého tělesa. Pro z_T platí analogický vztah.

c) Charakteristické osy

Jedná se o osy zohledňující geometrické hledisko - osy symetrie průřezu a hlavní centrální osy (4.3.2).

d) Typ definiční oblasti

Z hlediska souvislosti definiční oblasti příčného průřezu máme dva typy oblastí. Oblast může být tvořena jednoduše souvislou oblastí, kdy její obrys je charakterizován jedinou spojitou křivkou (obr 4.2 b), nebo vícenásobně souvislou oblastí, kdy obrys tvoří několik spojitých křivek (obr. 4.2 a).



Obr. 4.2 Souvislost definiční oblasti

4.2 Závislé průřezové charakteristiky

a) Lineární momenty

Lineární momenty U_y k ose y a U_z k ose z jsou definovány vztahem:

$$U_y = \iint_S z \, dS, \quad U_z = \iint_S y \, dS. \quad (4.5)$$

Je-li průřez složen z několika jednodušších obrazců, platí pro lineární momenty vztah:

$$U_y = \sum U_{yi} \text{ a } U_z = \sum U_{zi}, \quad (4.6)$$

kde U_{yi} , respektive U_{zi} je lineární moment jednotlivých obrazců. Pokud souřadnicový systém prochází těžištěm jsou lineární momenty nulové.

Pomocí lineárních momentů se dají určit i souřadnice těžiště, a to vztahem:

$$y_T = \frac{U_z}{S}, \quad z_T = \frac{U_y}{S}. \quad (4.7)$$

b) Kvadratické momenty

Osový kvadratický moment J_y k ose y a kvadratický moment J_z k ose z:

$$J_y = \iint_S z^2 \, dS, \quad J_z = \iint_S y^2 \, dS \quad (4.8)$$

A platí $J_y, J_z > 0$.

Deviční kvadratický moment J_{yz} k osám y a z:

$$J_{yz} = \iint_S y \cdot z \, dS \quad (4.9)$$

A polární kvadratický moment:

$$J_p = \iint_S r^2 \, dS = \iint_S (y^2 + z^2) \, dS = J_y + J_z \quad (4.10)$$

A platí $J_p > 0$.

c) Poloměry osových kvadratických momentů

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{S}}, \quad i_z = \sqrt{\frac{J_z}{S}} \quad (4.11)$$

d) Průřezové moduly

Modul průřezu v ohybu:

$$W_o = \frac{J_n}{h}, \quad (4.12)$$

kde J_n je osový kvadratický moment k neutrální ose tělesa a h je vzdálenost od neutrální osy k nejvzdálenějšímu bodu obrysu. Neutrální osa je „geometrickým místem bodů příčného průřezu s nulovým délkovým přetvořením a tím i nulovým napětím.“ [1] Neutrální osa vždy prochází těžištěm.

Modul průřezu v krutu:

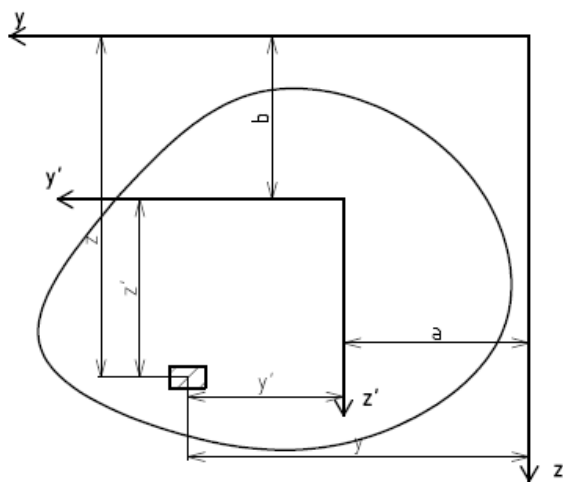
$$W_k = \frac{J_p}{R}, \quad (4.13)$$

kde J_p je polární kvadratický moment k těžišti a R vnější poloměr průřezu.

4.3 Transformace souřadnic

Pokud známe kvadratické momenty k osám y a z , tak můžeme přepočítat nové kvadratické momenty ke transformovaným souřadnicím. Jedná se buď o posunutí os nebo o natočení os, kdy počátky původního a nového souřadnicového systému jsou stejné.

4.3.1 Posunuté osy



Obr. 4.3 Posunuté osy

K posunutému souřadnicovému systému dostáváme vztahy pro transformaci souřadnic: $y' = y - a$, $z' = z - b$. Pro osový kvadratický moment pak platí vztah:

$$J'_y = \iint_S z'^2 dS = \iint_S (z - b)^2 dS = \iint_S z^2 dS - \iint_S 2zb dS + \iint_S b^2 dS$$

$$J'_y = J_y - 2bU_y + b^2S \quad (4.14)$$

Pro osový kvadratický moment J'_z analogicky:

$$J'_z = J_z - 2aU_z + a^2S$$

Pro polární kvadratický moment:

$$J_p = J'_y + J'_z = J_y + J_z - 2bU_y - 2aU_z + (a^2 + b^2)S \quad (4.15)$$

A pro deviační kvadratický moment:

$$J'_{yz} = \iint_S y'z' dS = \iint_S (y-a)(z-b) dS = \iint_S yz dS + \iint_S ab dS - \iint_S by dS - \iint_S az dS$$

$$J'_{yz} = J_{yz} + abS - bU_z - aU_y \quad (4.16)$$

Procházejí-li osy y a z těžištěm, jsou lineární momenty nulové a vztahy (4.14)-(4.16) se zjednoduší, dostáváme tzv. Steinerovy věty:

$$J'_y = J_y + b^2S, J'_z = J_z + a^2S,$$

$$J_p = J_y + J_z + (a^2 + b^2)S, J'_{yz} = J_{yz} + abS \quad (4.17)$$

Protože b^2S , respektive a^2S ze vztahů (4.17) jsou nezáporné hodnoty, jsou osové kvadratické momenty J'_y , respektive J'_z nejmenší k ose procházející těžištěm. Obdobně u polárního kvadratického momentu platí, že polární moment k těžišti je nejmenší, jelikož hodnota $(a^2+b^2)S$ je také nezáporná.

Pro lineární momenty k posunutým osám platí vztahy:

$$U'_y = \iint_S z' dS = \iint_S (z-b) dS$$

$$U'_y = U_y - bS \quad (4.18)$$

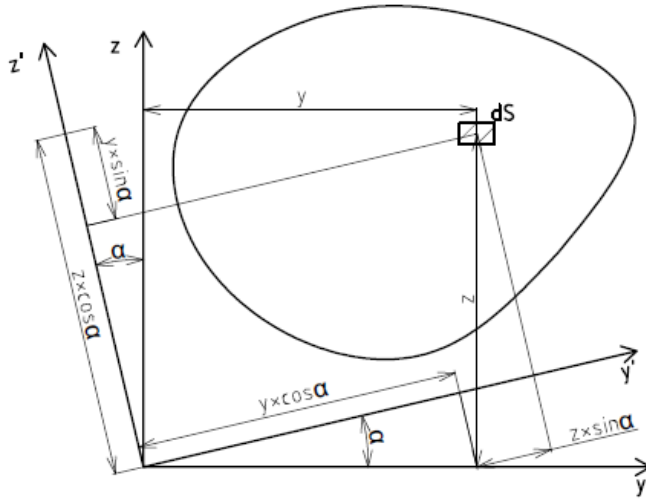
Pro lineární moment U'_z obdobně:

$$U'_z = U_z - aS$$

Jsou-li osy y a z centrálními osami, tedy procházejí těžištěm, zjednoduší se vztahy na:

$$U'_y = -bS \quad a \quad U'_z = -aS \quad (4.19)$$

4.3.2 Natočené osy



Obr. 4.4 Natočené osy

Pro transformaci souřadnic u natočených os platí: $y' = y \cos \alpha + z \sin \alpha$
 $z' = z \cos \alpha - y \sin \alpha$. Pro osový kvadratický moment pak platí:

$$\begin{aligned} J'_y &= \iint_S z'^2 dS = \iint_S (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dS \\ &= \iint_S z^2 \cos^2 \alpha dS - \iint_S 2 yz \cos \alpha \sin \alpha dS + \iint_S y^2 \sin^2 \alpha dS \\ J'_y &= J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin(2\alpha) + J_z \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pro osový kvadratický moment J'_z analogicky:

$$J'_z = J_z \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin(2\alpha) + J_y \sin^2 \alpha$$

Pro deviační kvadratický moment:

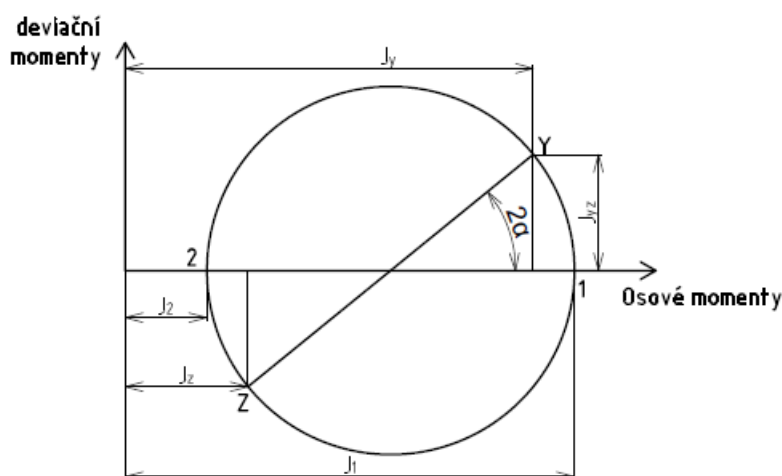
$$\begin{aligned} J'_{yz} &= \iint_S y' z' dS = \iint_S (y \cos \alpha + z \sin \alpha)(z \cos \alpha - y \sin \alpha) dS \\ &= \iint_S yz (\cos \alpha)^2 + \iint_S z^2 \cos \alpha \sin \alpha - \iint_S y^2 \cos \alpha \sin \alpha - \iint_S yz (\sin \alpha)^2 \\ J'_{yz} &= \frac{J_y - J_z}{2} \sin(2\alpha) + J_{yz} \cos(2\alpha) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Pro polární moment:

$$\begin{aligned}
 J_p' &= J_y' + J_z' = J_y \cos^2 \alpha - J_{yz} \sin(2\alpha) + J_z \sin^2 \alpha \\
 &\quad + J_z \cos^2 \alpha + J_{yz} \sin(2\alpha) + J_y (\sin \alpha)^2 \\
 &= J_y (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + J_z (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \\
 &= J_y + J_z
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

Ze vztahu (4.22) je vidět, že polární kvadratický moment při natočených osách je stejný jako při osách původních viz (4.10), a tedy polární kvadratický moment nezávisí na natočení souřadného systému, ale jen na jeho počátku.

V Mohrově rovině, kde vodorovná osa značí osově kvadratické momenty a svislá osa představuje deviační kvadratické momenty, tvoří vztahy (4.20) a (4.21) tzv. Mohrovu kružnici (obr. 4.5). K sestavení Mohrovy kružnice potřebujeme znát osově kvadratické momenty J_y a J_z a deviační kvadratický moment J_{yz} . Na vodorovné ose ve vzdálenosti J_y a J_z od počátku vztyčíme kolmice a vytvoříme body Y a Z podle obrázku 4.5. Nejdříve vynášíme kolmici v osovém kvadratickém momentu, který je větší (na obr. 4.5 $J_y > J_z$). Podle znaménka deviačního momentu vynášíme kolmici buď dolů, pokud je deviační moment záporný, nebo nahoru, pokud je kladný (na obr. 4.5 $J_{yz} > 0$). V menším osovém kvadratickém momentu vynášíme deviační moment opačným směrem. Střed kružnice leží na vodorovné ose ve vzdálenosti $(J_y + J_z)/2$.



Obr. 4.5 Mohrova kružnice

Pokud pootočíme průřez o úhel α směrem k vodorovné ose (na obr. 4.5 po směru hodinových ručiček), pak dostáváme ze souřadnicových os osy hlavní a z osových kvadratických momentů hlavní kvadratické momenty J_1 a J_2 . V Mohrově rovině jsou úhly dvojnásobné. Z obrázku 4.5 vyplývají vztahy pro hlavní kvadratické momenty:

$$J_{1,2} = \frac{J_y + J_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_y - J_z}{2}\right)^2 + J_{yz}^2} \quad (4.23)$$

A pro úhel α :

$$\tan(2\alpha) = \left| \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \right| \quad (4.24)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \left| \frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} \right| \quad (4.25)$$

5 Výpočet průřezových charakteristik mnohoúhelníku

Tato kapitola je zpracována podle [3] a [4]

K výpočtu průřezových charakteristik mnohoúhelníku se používá princip tzv. Greenovy věty, která převádí plošný integrál na integrál křivkový. Nechť $P(y, z)$ a $Q(y, z)$ jsou dvě spojitě funkce, které mají ve dvourozměrné jednoduše souvislé ohraničené oblasti S spojitě parciální derivace, a $b(t)$ je kladně orientovaná vzhledem k oblasti S (proti směru hodinových ručiček) po částech hladká uzavřená křivka, která je zároveň obrysem oblasti S , pak platí vztah:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) dy dz = \int_b P dy + Q dz \quad (5.1)$$

Pokud se nachází $f(y, z)$ na oblasti S jako v případě pro průřezové charakteristiky, tak je zřejmé, že se $f(y, z)$ musí rozdělit na $\partial Q / \partial y$ a $\partial P / \partial z$. Nechť $b(t) = (y(t), z(t))$, $t \in [t_1, t_2]$ je křivka a $f(y, z)$ je spojitá funkce, pak platí:

$$\int_b f(y, z) dy = \int_{t_1}^{t_2} f(y(t), z(t)) y'(t) dt \quad (5.2)$$

$$\int_b f(y, z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(y(t), z(t)) z'(t) dt \quad (5.3)$$

Nechť $b_1(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ a $b_2(t)$, $t \in [t_2, t_3]$ jsou křivky a platí $b_1(t_2) = b_2(t_2)$ a také $b = b_1 \cup b_2$, pak také platí:

$$\int_b f(y, z) dy = \int_{b_1} f(y, z) dy + \int_{b_2} f(y, z) dz \quad (5.4)$$

Pokud je funkce b' orientovaná záporně vzhledem k oblasti S (po směru hodinových ručiček), tedy b' je obrácená b , pak se změni znaménko integrálu:

$$\int_b f(y, z) dy = - \int_{b'} f(y, z) dy \quad (5.5)$$

Uzavřený mnohoúhelník p je určený body $p_i = (y_i, z_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, kde $p_0 = p_n$. Body p_i leží na obrysu $b(t)$, kde $b(t)$ je po částech lineární křivka, která může být rozdělena na n částí.

$$\mathbf{b}(t) = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{b}_i(t), \quad (5.6)$$

kde $\mathbf{b}_i(t)$, $t \in [0, 1]$ je dáno vztahem:

$$\mathbf{b}_i(t) = \mathbf{p}_{i-1} + t(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}), \quad (5.7)$$

odkud plyne pro složky bodu \mathbf{p}_i a jejich derivace, které jsou potřeba k výpočtu křivkového integrálu, následující vztahy:

$$y_i(t) = y_{i-1} + t(y_i - y_{i-1}) \quad (5.8)$$

$$z_i(t) = z_{i-1} + t(z_i - z_{i-1}) \quad (5.9)$$

$$y_i'(t) = y_i - y_{i-1} \quad (5.10)$$

$$z_i'(t) = z_i - z_{i-1} \quad (5.11)$$

A proto bude moci být křivkový integrál podél hranice mnohoúhelníku $\mathbf{p}=\mathbf{b}(t)$ vypočten pomocí vztahu:

$$\int_b P dy + Q dz = \sum_{i=1}^n \int_{b_i} P dy + Q dz \quad (5.12)$$

5.1 Obsah

Obsah je dán vztahem (4.1). Aby se mohl použít vztah (5.1), je potřeba rozdělit 1 na $\partial Q/\partial y$ a $\partial P/\partial z$. Aby byly obě parciální derivace symetrické, je zvoleno $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{2}$ a $\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{2}$. Pak $P(y, z) = -\frac{z}{2}$ a $Q(y, z) = \frac{y}{2}$ a obsah se dá vypočítat podle:

$$S = \iint_S dy dz = \iint_S \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) dy dz = \int_b -\frac{z}{2} dy + \frac{y}{2} dz = \frac{1}{2} \int_b y dz - \frac{1}{2} \int_b z dy$$

Poté se použijí vztahy (5.2), (5.3) a (5.8) - (5.11) pro výpočet integrálů:

$$\begin{aligned} \int_b y dz &= \int_{t_1}^{t_2} y z' dt = \int_0^1 [y_{i-1} + t(y_i - y_{i-1})](z_i - z_{i-1}) dt \\ &= \left[\left(t y_{i-1} + \frac{t^2}{2} (y_i - y_{i-1}) \right) (z_i - z_{i-1}) \right]_0^1 = \frac{1}{2} (y_{i-1} + y_i)(z_i - z_{i-1}) \end{aligned}$$

Pro druhý integrál platí analogický vztah:

$$\int_b z dy = \int_0^1 z y' dt = \frac{1}{2}(z_{i-1} + z_i)(y_i - y_{i-1})$$

Rozdílu těchto integrálů odpovídá:

$$\begin{aligned} \int_b y dz - \int_b z dy &= \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)(z_i - z_{i-1}) - \frac{1}{2}(z_{i-1} + z_i)(y_i - y_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2}(y_{i-1}z_i + y_iz_i - y_{i-1}z_{i-1} - y_iz_{i-1} - z_{i-1}y_i - y_iz_i + y_{i-1}z_{i-1} + y_{i-1}z_i) \\ &= y_{i-1}z_i - y_iz_{i-1} \end{aligned}$$

A proto pro obsah mnohoúhelníku platí:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_{i-1}z_i - y_iz_{i-1} \quad (5.13)$$

5.2 Lineární moment

Pro lineární moment U_y platí vztah

(4.5). V tomto případě se rozdělí z na $\partial Q/\partial y = z$ a $\partial P/\partial z = 0$, a proto $Q(y, z) = yz$ a $P(y, z) = 0$.

$$\begin{aligned} U_y &= \iint_S z dx dy = \int_b yz dz = \int_{t_1}^{t_2} yz z' dt \\ &= \int_0^1 [y_{i-1} + t(y_i - y_{i-1})][z_{i-1} + t(z_i - z_{i-1})](z_i - z_{i-1}) dt \\ &= (z_i - z_{i-1}) \int_0^1 y_{i-1}z_{i-1} + z_{i-1}t(y_i - y_{i-1}) + y_{i-1}t(z_i - z_{i-1}) \\ &\quad + t^2(z_i - z_{i-1})(y_i - y_{i-1}) dt \\ &= (z_i - z_{i-1}) \left[y_{i-1}z_{i-1} + \frac{1}{2}z_{i-1}(y_i - y_{i-1}) + \frac{1}{2}y_{i-1}(z_i - z_{i-1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3}(z_i - z_{i-1})(y_i - y_{i-1}) \right] \\ &= (z_i - z_{i-1}) \left(\frac{1}{3}y_{i-1}z_{i-1} + \frac{1}{6}y_iz_{i-1} + \frac{1}{6}y_{i-1}z_i + \frac{1}{3}y_iz_i \right) \end{aligned}$$

$$U_y = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1})(z_{i-1}(2y_{i-1} + y_i) + z_i(y_{i-1} + 2y_i)) \quad (5.14)$$

Tato rovnice se dá zjednodušit, protože při výpočtu sumy se některé složky odečtou v po sobě jdoucích krocích na výsledný vztah:

$$U_y = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (z_i + z_{i-1})(y_{i-1}z_i - y_i z_{i-1}) \quad (5.15)$$

Pro lineární moment U_z se používá analogický vztah:

$$U_z = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i-1})(y_{i-1}z_i - y_i z_{i-1}) \quad (5.16)$$

Podle vztahu (4.7) můžeme pomocí lineárních momentů vypočítat i těžiště, a to tak, že výslednou sumu podělíme obsahem:

$$y_T = \frac{1}{6S} \sum_{i=1}^n (y_i + y_{i-1})(y_{i-1}z_i - y_i z_{i-1}) \quad (5.17)$$

$$z_T = \frac{1}{6S} \sum_{i=1}^n (z_i + z_{i-1})(y_{i-1}z_i - y_i z_{i-1}) \quad (5.18)$$

5.3 Kvadratické momenty

Osový kvadratický moment J_y je dán vztahem (4.8), proto je potřeba rozdělit z^2 na $\partial Q/\partial y = z^2$ a $\partial P/\partial z = 0$, a proto $Q(y, z) = yz^2$ a $P(y, z) = 0$.

$$\begin{aligned} J_y &= \iint_S z^2 dy dz = \int_b^t y z^2 dz = \int_{t_1}^{t_2} y z^2 z' dt \\ &= \int_0^1 [y_{i-1} + t(y_i - y_{i-1})][z_{i-1} + t(z_i - z_{i-1})]^2 (z_i - z_{i-1}) dt \\ &= (z_i - z_{i-1}) \int_0^1 [y_{i-1} + t(y_i - y_{i-1})] [z_{i-1}^2 + 2z_{i-1}t(z_i - z_{i-1}) \\ &\quad + t^2(z_i - z_{i-1})^2] dt \\ &= (z_i - z_{i-1}) \int_0^1 y_{i-1}z_{i-1}^2 + t(y_i z_{i-1}^2 - y_{i-1}z_{i-1}^2 + 2y_{i-1}z_{i-1}z_i - 2y_{i-1}z_{i-1}^2) \\ &\quad + t^2(2y_{i-1}z_{i-1}z_i - 2y_i z_{i-1}^2 - 2y_{i-1}z_{i-1}z_i + 2y_{i-1}z_{i-1}^2 + y_{i-1}z_i^2 - 2y_{i-1}z_i z_{i-1} \\ &\quad + y_{i-1}z_{i-1}^2) \\ &\quad + t^3(y_i z_i^2 - 2y_i z_i z_{i-1} + y_i z_{i-1}^2 - y_{i-1}z_i^2 + 2y_{i-1}z_i z_{i-1} - y_{i-1}z_{i-1}^2) dt = \end{aligned}$$

$$= (z_i - z_{i-1}) \left(\frac{1}{4} y_{i-1} z_{i-1}^2 + \frac{1}{12} y_i z_{i-1}^2 + \frac{1}{6} y_{i-1} z_i z_{i-1} + \frac{1}{6} y_i z_i z_{i-1} + \frac{1}{12} y_{i-1} z_i^2 + \frac{1}{4} y_i z_i^2 \right)$$

$$J_y = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1}) \left(z_{i-1}^2 (3y_{i-1} + y_i) + 2z_i z_{i-1} (y_{i-1} + y_i) + z_i^2 (y_{i-1} + 3y_i) \right) \quad (5.19)$$

A stejně jako u lineárního momentu se v průběhu počítání sumy některé prvky zkrátí, zjednodušený vzorec pro výpočet osového kvadratického momentu mnohoúhelníku je:

$$J_y = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (z_{i-1}^2 + z_i z_{i-1} + z_i^2) (y_{i-1} z_i - y_i z_{i-1}) \quad (5.20)$$

Pro osový kvadratický moment J_z je vztah analogický:

$$J_z = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (y_{i-1}^2 + y_i y_{i-1} + y_i^2) (y_{i-1} z_i - y_i z_{i-1}) \quad (5.21)$$

U deviačního momentu, který je vyjádřen vztahem (4.9), se yz rozdělí na $\partial Q/\partial y = yz/2$ a $\partial P/\partial z = -yz/2$. Z toho plyne, že $Q(y, z) = y^2 z/4$ a $P(y, z) = -yz^2/4$, a proto můžeme deviační moment vypočítat pomocí vztahu:

$$J_{yz} = \iint_S yz \, dy \, dz = \int_b \frac{1}{4} y^2 z \, dz - \frac{1}{4} y z^2 \, dy = \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_2} y^2 z z' \, dt - \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_2} y z^2 y' \, dt,$$

odkud potřebujeme vypočítat dva integrály. Druhý integrál je podobný tomu, který byl potřeba při výpočtu osového kvadratického momentu J_y , jen místo z' dáme y' . Potom platí:

$$\int_{t_1}^{t_2} y z^2 y' \, dt = (y_i - y_{i-1}) \left(\frac{1}{4} y_{i-1} z_{i-1}^2 + \frac{1}{12} y_i z_{i-1}^2 + \frac{1}{6} y_{i-1} z_i z_{i-1} + \frac{1}{6} y_i z_i z_{i-1} + \frac{1}{12} y_{i-1} z_i^2 + \frac{1}{4} y_i z_i^2 \right)$$

Pro první integrál analogicky:

$$\int_{t_1}^{t_2} y^2 z z' dt = (z_i - z_{i-1}) \left(\frac{1}{4} z_{i-1} y_{i-1}^2 + \frac{1}{12} z_i y_{i-1}^2 + \frac{1}{6} z_{i-1} y_i y_{i-1} + \frac{1}{6} z_i y_i y_{i-1} + \frac{1}{12} z_{i-1} y_i^2 + \frac{1}{4} z_i y_i^2 \right)$$

Po roznásobení a odečtení integrálů dostáváme:

$$\frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_2} y^2 z z' - \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_2} y z^2 y' dt = \frac{1}{24} (2y_{i-1} z_{i-1} + y_i z_{i-1} + y_{i-1} z_i + 2y_i z_i) (y_{i-1} z_i - y_i z_{i-1}),$$

takže deviační moment pro mnohoúhelník můžeme vypočítat pomocí vzorce:

$$J_{yz} = \frac{1}{24} \sum_{i=1}^n (2y_{i-1} z_{i-1} + y_i z_{i-1} + y_{i-1} z_i + 2y_i z_i) (y_{i-1} z_i - y_i z_{i-1}). \quad (5.22)$$

Pro polární kvadratický moment použijeme stejný vztah jako (4.10), tedy součet osových kvadratických momentů.

Důležité je nezapomenout, že vztahy (5.13) až (5.22) platí, jen pokud je křivka b kladně orientovaná vzhledem k oblasti S, jinak řečeno jsou body obrysu p_i seřazeny tak, aby po sobě šly proti směru hodinových ručiček. Ale jak je vidět ze vztahu (5.5), pokud je křivka b orientovaná záporně vzhledem k oblasti S, změní se u těchto vztahů jen znaménko. Pak stačí jen výsledky vynásobit -1. Proto můžeme výpočet pro obsah použít i jako určení směru bodů mnohoúhelníku kolem oblasti S. Pokud je obsah kladný, jsou body proti směru hodinových ručiček a pokud je obsah záporný, jsou body seřazeny po směru hodinových ručiček.

6 Matlab

Tato kapitola je zpracována podle [5] a [6].

Pro vytváření skriptů, které budou představeny v následujících kapitolách, je použit program Matlab, což je interaktivní prostředí vytvořené společností Mathworks s programovacím jazykem 4. generace, i když někteří programátoři nepovažují programovací jazyk Matlabu vůbec za programovací jazyk.

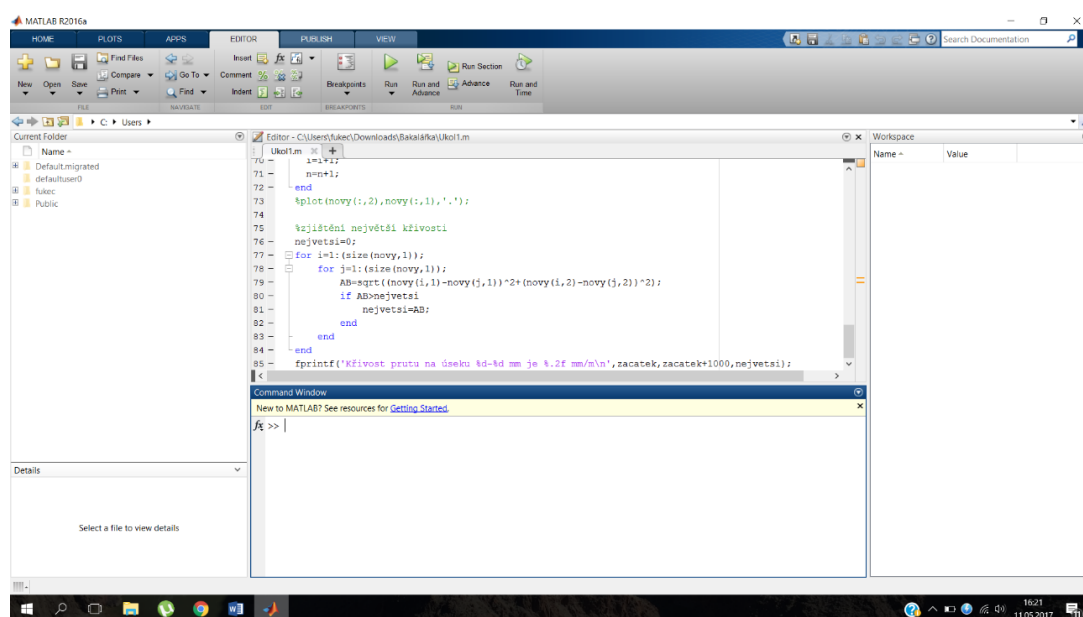
Původně byl program určen jen pro početní účely, avšak později byl rozšířen do několika odvětví. Nyní je hlavně využíván ve vědě, strojírenství a ekonomii. Název Matlab vznikl zkrácením slov matrix laboratory, která se dají přeložit jako maticová laboratoř, a je tedy zřejmé, že se pracuje hlavně se strukturou matic. Mimo práci s maticemi se dají v Matlabu vykreslovat grafy ve dvou i třech dimenzích, vytvářet algoritmy, počítačové simulace, analyzovat data a vytvářet aplikace včetně uživatelského rozhraní.

Matlab má slabou dynamickou typovou kontrolu. To znamená, že proměnné nezáleží, jakého typu je. Proměnná může být zapsána jako komplexní číslo a poté přepsána na textový řetězec.

Mezi základní vlastnosti patří, že všechny objekty jsou brány jako prvky pole, tedy matice. Matice mohou mít libovolnou velikost, avšak pouze obdélníkového tvaru. Pro matice 1x1 se používá název skalár a matice 1 x n nebo m x 1 se nazývají vektor. Všechny prvky matice musí být stejného typu.

K vytváření vlastních funkcí a skriptů slouží soubory s koncovkou .m tzv. m-files. Každý uživatel si může m-file vytvořit, a tak přidat funkci, kterou potřebuje. Každá funkce může mít více vstupních i výstupních argumentů.

Výkonnost Matlabu je dále rozšiřována pomocí přídatného softwaru tzv. toolboxů, které se zaměřují na určitý problém, nebo uživatelskými m-files. Nejznámějším a nejpoužívanějším toolboxem je Simulink, který slouží k simulaci dynamických systémů.



Obr. 6.1 Matlab

7 Stanovení křivosti prutu

Na křivost křivky se dá dívat několika způsoby. Jedním ze způsobů je, že jsou-li dva body ve velmi malé vzdálenosti od sebe na křivce $Q(t)$ a v těchto bodech jsou vytvořeny tečny ke křivce Q , svírají tečny úhel φ . Čím větší úhel φ bude, tím víc se od sebe budou lišit směry tečen, to znamená, čím větší je úhel φ , tím je křivka křivější. Tato křivost je převrácená hodnota poloměru oskulační kružnice a platí pro ni vztah:

$$\kappa = \frac{|Q'(t) \times Q''(t)|}{|Q'(t)|^3}. \quad (7.1)$$

V této práci bude brán na křivost jiný pohled. Je-li metrová křivka Q s hlavním směrem v ose x , tak její křivost je, pokud je v každém bodu křivky vytvořena rovnoběžka s hlavním směrem, v tomto případě s osou x , vzdálenost dvou od sebe nejvzdálenějších rovnoběžek, a její jednotka se udává v mm/m.

Při stanovování křivosti prutu se počítá pouze s otevřenými pruty slabě zakřivenými v prostoru.

Pro výpočet křivosti jsou vytvořeny 2 skripty s jinými způsoby výpočtu. Pro oba je potřeba nejprve vytvořit náhodnou 3D křivku. Nejdříve je vytvořeno 29 bodů po 250 mm podél osy x s náhodně vygenerovanými hodnotami pro osy y a z v rozmezí od -10 do 10 mm. Poté je těmito body aproximován polynom sedmého stupně, takže vznikne 7 m dlouhá křivka. Následně se musí zvolit počátek počítaného metrového úseku.

Po zvolení počátku měřeného úseku se už od sebe varianty výpočtů liší. V první se spojí první bod měřeného úseku s posledním a vytvoří se tak přímka p . Pomocí analytické geometrie v rovině určíme vzdálenost jednotlivých bodů od vytvořené úsečky v rovině xy a xz . K získání vzdáleností bodů od přímky dosadíme do vztahu:

$$v = \frac{|c \cdot a_1 + d \cdot a_2 + e|}{\sqrt{c^2 + d^2}}, \quad (7.2)$$

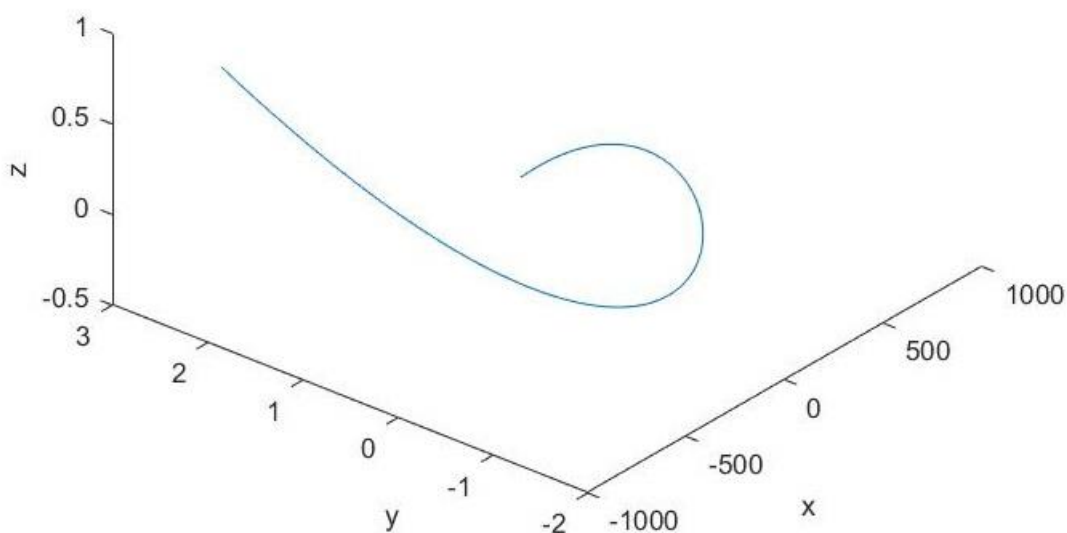
kde a_1 a a_2 jsou souřadnice bodu $A[a_1, a_2]$ a a , b , c jsou konstanty z obecné rovnice přímky p : $cx+dy+e=0$. Tyto vzdálenosti poté tvoří souřadnice bodů, které jsou promítnuty do kolmé roviny k přímce p . Křivost je poté dána vzdáleností dvou od sebe nejvzdálenějších bodů v promítnuté rovině.

V druhé variantě je ke stanovení křivosti využito geometrických charakteristik. Nejdříve se vypočítají souřadnice těžiště a centrální kvadratické osové a deviační momenty. Pomocí nich se zjistí hlavní centrální osy, ze kterých se už dá zjistit výsledná křivost.

Křivost[mm/m]		Čas[s]	
Metoda A	Metoda B	Metoda A	Metoda B
6,23	7,06	0,075423	0,094078
6,69	7,78	0,069864	0,079303
9,81	11,28	0,071357	0,069773
7,8	9,28	0,072406	0,065838
6,71	7,73	0,070258	0,066211
0,89	1,07	0,368609	0,063025
3,38	3,6	0,371039	0,062932
5,54	6,39	0,747599	0,065708
10,23	11,78	0,391641	0,060555
3,35	3,4	0,395509	0,060988

Tabulka 7.1 Porovnání metod pro počítání křivosti

V předešlé tabulce jsou porovnány obě varianty. Metoda A odpovídá programu, který počítá křivost pomocí analytické geometrie a metoda B pomocí geometrických charakteristik. Přesnější varianta, tedy metoda B, počítá v průměru s o 14 % větší křivostí. Čas potřebný k výpočtu u této metody je v průměru do 7 setin sekundy. U první varianty se v prvních 5 měřeních pohybuje čas také okolo 7 setin vteřiny, ale v druhých 5 se čas prodloužil na pár desetín sekundy. Důvodem prodloužení je, že pro prvních pět měření se body počítané křivky vytvořily metodou A a poté se bez vymazání proměnných potřebných k výpočtu spočítala křivost variantou B. V dalších měřeních se metody prohodí. Za prodloužením času je tedy nejspíše nevymazání proměnných z předešlého počítání.



Obr. 7.1 Měřený metrový úsek (Pozor, měřítko os není stejné)

8 Stanovení průřezových charakteristik z obrázku

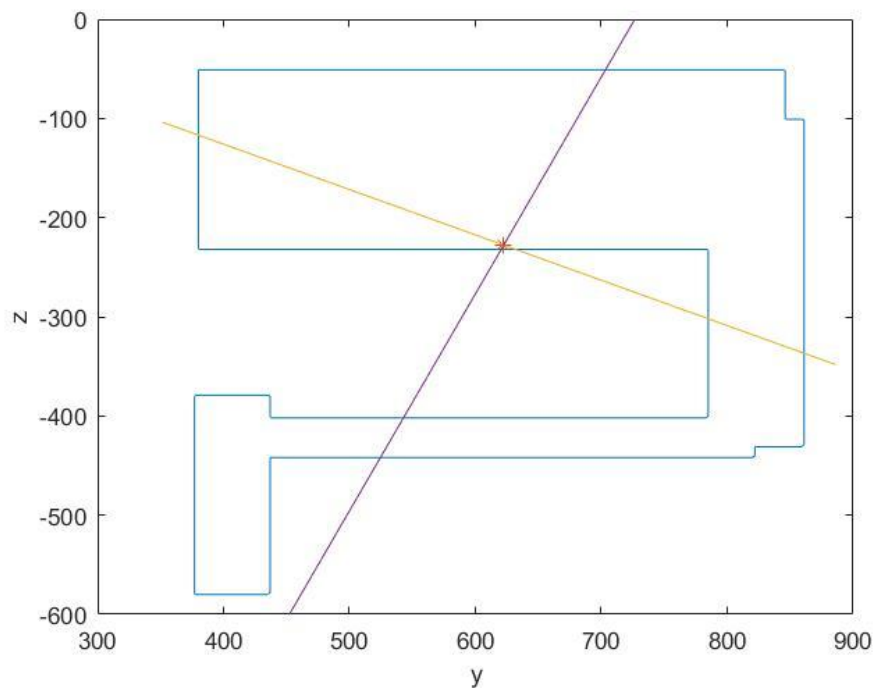
Pro stanovení průřezových charakteristik jsou brány pouze jednoduše souvislé oblasti, tedy průřezy bez děr.

Skript, který je vytvořen pro výpočet, pracuje se všemi formáty obrázků. Po načtení obrázku zjistí skript obrysovou hranu a seřadí body do vhodného pořadí. Protože se na obrys průřezu kvůli snadnějšímu výpočtu hledí jako na mnohoúhelník, jsou k výpočtu průřezových charakteristik použity vztahy z kapitoly 5.

Přesnost výpočtu je ovlivněna ne úplně přesným vyhodnocením obrysové čáry vestavěnou funkcí Matlabu a vkládáním obrázků, které mají zaoblené rohy. Proto se mírně výpočet liší od skutečné hodnoty. V následující tabulce jsou porovnány hodnoty těžiště, obsahu a kvadratických momentů základních obrazců vypočtené pomocí vytvořeného programu v Matlabu a analyticky. Například pro kruh se od sebe liší osově kvadratické momenty k osám y a z , i když by neměly. Pro průměr 96 pixelů se od sebe osově momenty liší o 0,05 % a vzhledem ke skutečným osovým kvadratickým momentům o 0,7 %. Pro obdélník se stranami 207 a 114 pixelů je odchylka menší. Pro osově kvadratické momenty je rozdíl od skutečných pouze 0,04 %. Všechny hodnoty jsou v pixelech, např. tedy kvadratické momenty jsou v „pixelech na čtvrtou“.

	Kruh		Obdélník		Čtverec	
	Matlab	Analyticky	Matlab	Analyticky	Matlab	Analyticky
T	[159;134]	[159;134]	[450;204]	[451;204]	[189;98]	[189;98]
S	7214,5	7238,3	23595	23598	7741	7744
Jy	4141422	4169220	25547070	25556634	4991798	4997461
Jz	4143357	4169220	84230760	84262559	4991798	4997461
Jp	8284779	8338440	109777830	109819193	9983596	9994922
	Trojúhelník		Elipsa		Lichoběžník	
	Matlab	Analyticky	Matlab	Analyticky	Matlab	Analyticky
T	[171;128]	[170;129]	[164;143]	[165;143]	[151;169]	[150;169]
S	8272	7840	12374	12370	8636,5	8507,5
Jy	6008088	5463609	6269701	6262323	4701971	4642244
Jz	9506968	8536889	23679870	23676993	10107740	-
Jp	15515056	14000498	29949571	29939316	14809711	-

Tabulka 8.1: Porovnání hodnot vypočtených v Matlabu a analytickým výpočtem



Obr. 8.1 Vykreslení průřezu s těžištěm a hlavními osami

Po skončení výpočtu vytvoří program obrázek průřezu s vyznačeným těžištěm a hlavními osami. Také vypíše výsledky výpočtu:

Hodnoty centrálních kvadratických momentů:

$$J_y = 2.429963e+09$$

$$J_z = 2.973230e+09$$

$$J_{yz} = 3.140136e+08$$

$$J_p = 5.403194e+09$$

$$J_1 = 3.116795e+09$$

$$J_2 = 2.286399e+09$$

Pootočením průřezu po směru hodinových ručiček o úhel 24.6 stupňů dostáváme hlavní osy.

9 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo vytvoření programů na stanovení geometrických charakteristik, přesněji na výpočet křivosti prutu a získání průřezových charakteristik z obrázku. Skripty ke zrealizování jsou vytvořeny v programu Matlab.

Nejdříve je popsáno, jak se získají geometrické charakteristiky a jak se dají transformovat v prostoru. Tyto vztahy jsou pomocí Greenovy věty modifikovány pro výpočet průřezových charakteristik mnohoúhelníku z důvodu jednodušších výpočtů.

K výpočtu křivosti prutu jsou použity dva způsoby. První počítá křivost pomocí analytické geometrie v rovině a druhý pomocí geometrických charakteristik. První skript je sice jednodušší, ale není tak přesný jako druhá varianta výpočtu, která je dokonce rychlejší než varianta první, ale jelikož čas výpočtu je v rámci desetin vteřiny, není rozdíl poznat. V přesnosti je už rozdíl větší, a to takový, že druhá varianta počítá v průměru s o 14 % větší křivostí.

Pro stanovení průřezových charakteristik z obrázku se používají modifikované vztahy zmíněné výše. Nepřesnost výpočtů je ovlivněna nedokonalým zjištěním obrysové čáry funkcí obsažené v Matlabu.

10 Seznam použité literatury

- [1] JANÍČEK, Přemysl. *Mechanika těles: pružnost a pevnost I.* 3., přeprac. vyd., v Akademickém nakl. CERM 1. Brno: CERM, 2004, 287 s. : obr. ISBN 802142592X.
- [2] Shrnutí základních poznatků. *Katedra mechaniky* [online]. Plzeň: Plánička, 2015 [cit. 2017-04-28]. Dostupné z: <http://www.kme.zcu.cz/kmet/pp/kvadraticke-charakteristiky-prurezu/shrnuti.pdf>
- [3] STEGER, Carsten. *On the Calculation of Moments of Polygons* [online]. München, 1996 [cit. 2017-04-28]. Dostupné z: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.29.8765&rep=rep1&type=pdf>. Technische Universität München.
- [4] ŽENÍŠEK, Alexander. *Křivkový a plošný integrál*. Vyd. 1. Brno: PC-DIR, 1997. Učební texty vysokých škol. ISBN 8021409657.
- [5] MATLAB Programming Language. *Altius Directory* [online]. Altiusdirectory.com, c2007-2017 [cit. 2017-05-11]. Dostupné z: <http://www.altiusdirectory.com/Computers/matlab-programming-language.php>
- [6] MATLAB. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001-2017 [cit. 2017-05-11]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/MATLAB>

11 Seznam použitých zkratk a symbolů

Symbol	Text	Jednotky
a	posunutí v ose y	m
α	natočení souřadného systému	rad
$A[a_1, a_2]$	souřadnice bodu A	m
b	Obrysová křivka/u transformací posunutí v ose z	
c	konstanta přímky	-
d	konstanta přímky	-
e	konstanta přímky	m
h	vzdálenost od neutrální osy	m
i_y	poloměr osového kvadratického momentu J_y	m
i_z	poloměr osového kvadratického momentu J_z	m
J_1	maximální hlavní centrální kvadratický moment	m^4
J_2	minimální hlavní centrální kvadratický moment	m^4
J_n	osový kvadratický moment k neutrální ose	m^4
J_p	polární kvadratický moment	m^4
J_y	kvadratický osový moment k ose y	m^4
J_{yz}	kvadratický deviační moment	m^4
J_z	kvadratický osový moment k ose z	m^4
m	hmotnost	kg
P	pomocná funkce	-
p	přímka	-
Q	pomocná funkce	-
R	vnější poloměr průřezu	m
S	obsah	m^2
t	parametr	
U_y	lineární moment k ose y	m^3
U_z	lineární moment k ose z	m^3
v	vzdálenost bodu od přímky	m
W_k	modul průřezu v krutu	m^3
W_o	modul průřezu v ohybu	m^3
y_T	y -ová složka těžiště	m
z_T	z -ová složka těžiště	m
κ	křivost	m^{-1}

12 Seznam příloh

Příloha 1 – Program v Matlabu pro výpočet křivosti prutu 1. varianta

Příloha 2 – Program v Matlabu pro výpočet křivosti prutu 2. varianta

Příloha 3 – Program v Matlabu pro stanovení průřezových charakteristik z obrázku

Příloha 1

```
clc;clear;close all;
%vytvoření náhodné 3d křivky
krivkay=20*rand(1,29)-10;
krivkaz=20*rand(1,29)-10;
krivkax=linspace(0,7000,29);
hodnoty(:,1)=1:7000;
hodnoty(:,2)=polyval(polyfit(krivkax,krivkay,7),1:7000);
hodnoty(:,3)=polyval(polyfit(krivkax,krivkaz,7),1:7000);
%vykreslení 3d křivky
plot3(1:7000,polyval(polyfit(krivkax,krivkay,7),1:7000),polyval(polyfit(krivkax,krivkaz,7),1:7000));
%rozměr matice hodnot
velikost=size(hodnoty);
%zadání počátku měřeného úseku
while 1
    zacatek=input('Metrovy hledany usek zacina v [mm]:');
    usekod=zacatek+hodnoty(1);
    if hodnoty(velikost(1),1)<(usekod+1000);
        fprintf('Zadejte novy zacatek useku(max: %d)\n',hodnoty(velikost(1),1)-1000-hodnoty(1));
        continue
    end
    break
end
%pořadové číslo začátku měřeného úseku v matici hodnot
start=find(hodnoty(:,1)>=usekod,1);
%pořadové číslo konce měřeného úseku v matici hodnot
konec=find(hodnoty(:,1)>=(usekod+1000),1)-1;
%počáteční bod
x=[hodnoty(start,1),hodnoty(start,2),hodnoty(start,3)];
%koncový bod
y=[hodnoty(konec,1),hodnoty(konec,2),hodnoty(konec,3)];
%vektor přímky
u=y-x;

%osa Y
%proměnné pro cyklus while
n=start;
i=1;
%y=ay*x+by
ay=(hodnoty(start,2)-hodnoty(konec,2))/(hodnoty(start,1)-hodnoty(konec,1));
by=hodnoty(start,2)-ay*hodnoty(start,1);
%vzdálenost bodů od přímky v ose Y
while hodnoty(n,1)<=(usekod+1000);
    novy(i,1)=(abs(ay*hodnoty(n,1)-hodnoty(n,2)+by))/sqrt(1+ay^2);
    if hodnoty(n,2)<(ay*hodnoty(n,1)+by);
        novy(i,1)=novy(i,1)*(-1);
    end
    i=i+1;
    n=n+1;
end
```

```

%osa Z
%proměně pro cyklus while
i=1;
n=start;
%y=az*x+bz
az=(hodnoty(start,3)-hodnoty(konec,3))/(hodnoty(start,1)-hodnoty(konec,1));
bz=hodnoty(start,3)-az*hodnoty(start,1);
%vzdálenost bodů od přímky v ose Z
while hodnoty(n,1)<=(usekod+1000);
    novy(i,2)=(abs(az*hodnoty(n,1)-hodnoty(n,3)+bz))/sqrt(1+az^2);
    if hodnoty(n,3)<(az*hodnoty(n,1)+bz);
        novy(i,2)=novy(i,2)*(-1);
    end
    i=i+1;
    n=n+1;
end
%plot(novy(:,2),novy(:,1),'.');

%zjištění největší křivosti
nejvetsi=0;
for i=1:(size(novy,1));
    for j=1:(size(novy,1));
        AB=sqrt((novy(i,1)-novy(j,1))^2+(novy(i,2)-novy(j,2))^2);
        if AB>nejvetsi
            nejvetsi=AB;
        end
    end
end
fprintf('Křivost prutu na úseku %d-%d mm je %.2f\n',zacatek,zacatek+1000,nejvetsi);

```

Příloha 2

```
clc;clear;close all;
%vytvoření náhodné 3d křivky
krivkay=20*rand(1,29)-10;
krivkaz=20*rand(1,29)-10;
krivkax=linspace(0,7000,29);
hodnoty(:,1)=1:7000;
hodnoty(:,2)=polyval(polyfit(krivkax,krivkay,7),1:7000);
hodnoty(:,3)=polyval(polyfit(krivkax,krivkaz,7),1:7000);
%vykreslení celé 3d křivky
plot3(1:7000,polyval(polyfit(krivkax,krivkay,7),1:7000),...
polyval(polyfit(krivkax,krivkaz,7),1:7000));
%rozměr matice hodnot
velikost=size(hodnoty);
%zadání počátku měřeného úseku
while 1
    zacatek=input('Metrovy hledany usek zacina v [mm]:');
    usekod=zacatek+hodnoty(1);
    if hodnoty(velikost(1),1)<(usekod+1000);
        fprintf('Zadejte novy zacatek useku(max: %d)\n',...
hodnoty(velikost(1),1)-1000-hodnoty(1));
        continue
    end
    break
end
%pořadové číslo začátku měřeného úseku v matici hodnot
start=find(hodnoty(:,1)>=usekod,1);
%pořadové číslo konce měřeného úseku v matici hodnot
konec=find(hodnoty(:,1)>=(usekod+1000),1);
%počáteční bod
x=[hodnoty(start,1),hodnoty(start,2),hodnoty(start,3)];
%koncový bod
y=[hodnoty(konec,1),hodnoty(konec,2),hodnoty(konec,3)];
%stanovení těžiště
xt=mean(hodnoty(start:konec,1));
yt=mean(hodnoty(start:konec,2));
zt=mean(hodnoty(start:konec,3));
%stanovení centrálních kvadratických momentů
Jx=sum((hodnoty(start:konec,2)-yt).^2+(hodnoty(start:konec,3)-zt).^2);
Jy=sum((hodnoty(start:konec,1)-xt).^2+(hodnoty(start:konec,3)-zt).^2);
Jz=sum((hodnoty(start:konec,1)-xt).^2+(hodnoty(start:konec,2)-yt).^2);
Jxy=sum((hodnoty(start:konec,1)-xt).*(hodnoty(start:konec,2)-yt));
Jxz=sum((hodnoty(start:konec,1)-xt).*(hodnoty(start:konec,3)-zt));
Jyz=sum((hodnoty(start:konec,2)-yt).*(hodnoty(start:konec,3)-zt));
%získání vektorů hlavních os
I=[Jx,-Jxy,-Jxz;-Jxy,Jy,-Jyz;-Jxz,-Jyz,Jz];
[A,B]=eig(I);
%stanovení úhlů pro transformaci kolem osy y a z
uhelz=acos(abs(A(1)/sqrt(A(1)^2+A(2)^2)));
uhely=acos(abs(A(1)/sqrt(A(1)^2+A(3)^2)));
if (A(1)>0&A(3)<0);
    uhely=-uhely;
elseif (A(1)<0&A(3)>0);
```

```

        uhely=-uhely;
    end
    if (A(1)>0&A(2)>0);
        uhelz=-uhelz;
    elseif (A(1)<0&A(2)<0)
        uhelz=-uhelz;
    end
    uhelx=0;
    %transformační matice
    a=[xt;yt;zt];
    kolemx=[1,0,0;0,cos(uhelx),-sin(uhelx);0,sin(uhelx),cos(uhelx)];
    kolemz=[cos(uhelz),-sin(uhelz),0;sin(uhelz),cos(uhelz),0;0,0,1];
    T=kolemz*kolemz*kolemy;
    %stanovení úhlu transformace kolem osy x
    r=T*A(:,2);
    uhelx=acos(abs(r(2)/sqrt(r(2)^2+r(3)^2)));
    if (r(2)>0&r(3)>0)
        uhelx=-uhelx;
    elseif (r(2)<0&r(3)<0)
        uhelx=-uhelx;
    end
    kolemx=[1,0,0;0,cos(uhelx),-sin(uhelx);0,sin(uhelx),cos(uhelx)];
    T=kolemz*kolemz*kolemy;
    %transformace souřadnic
    novy=zeros(3,konec-start);
    j=1;

    for i=start:konec
        hodnoty(i,:)=hodnoty(i,:[xt,yt,zt]);
        novy(:,j)=T*hodnoty(i,:);
        j=j+1;
    end
    %zjištění maximální křivosti
    krivosty=max(novy(2,:))-min(novy(2,:));
    krivostz=max(novy(3,:))-min(novy(3,:));
    krivost=max(krivosty,krivostz);
    fprintf('Křivost prutu na úseku %d-%d mm je %.2f\n',zacatek,zacatek+1000,krivost);
    %vykreslení měřeného úseku
    figure
    plot3(novy(1,:),novy(2,:),novy(3,:));
    xlabel('x');
    ylabel('y');
    zlabel('z');

```


Příloha 3

```
clc;clear;close all;
%načtení obrázku
I=imread('aa.png');
I=im2bw(I);
%zjištění obrysu
okraj=edge(I);
%uspořádání obrysu podél oblasti
[x,y]=find(okraj');
roh1=corner(I);
roh1=roh1(1,:);
[~, ind]=min(pdist2(roh1,[x,y]));
roh1=[x(ind),y(ind)];
okno=okraj(roh1(2)-1:roh1(2)+1,roh1(1)-1:roh1(1)+1);
okno(2,2)=0;
[u,v]=find(okno);
u(end)=[];
v(end)=[];
okraj(roh1(2)+u-2,roh1(1)+v-2)=0;
B=bwdistgeodesic(okraj,roh1(1),roh1(2));
[~, poradi]=sort(B(sub2ind(size(B),y,x)));
%uspořádané body i-1
polx=x(poradi);
poly=y(poradi)*(-1);
%body i
polx2=[polx(2:end);polx(1)];
poly2=[poly(2:end);poly(1)];
%stanovení těžiště a kvadratických momentů
S=0.5*sum(polx.*poly2-polx2.*poly);
xt=(1/(6*S))*sum((polx+polx2).*(polx.*poly2-polx2.*poly));
yt=(1/(6*S))*sum((poly+poly2).*(polx.*poly2-polx2.*poly));
Ix=(1/12)*sum((poly.*poly+poly.*poly2+poly2.*poly2).*(polx.*poly2-polx2.*poly));
Iy=(1/12)*sum((polx.*polx+polx.*polx2+polx2.*polx2).*(polx.*poly2-polx2.*poly));
Ixy=(1/24)*sum((polx.*poly2+2*polx.*poly+2*polx2.*poly2+polx2.*poly).*(polx.*poly2-polx2.*poly));
%záporné hodnoty pro obrys jdoucí po směru hodinových ručiček
if S<0
    S=S*(-1);
    Iy=-Iy;
    Ix=-Ix;
    Ixy=-Ixy;
end
%centrální kvadratické momenty
Jx=Ix-yt^2*S;
Jy=Iy-xt^2*S;
Jxy=Ixy-xt*yt*S;
Jp=Jx+Jy;
%hlavní kvadratické momenty
J1=((Jx+Jy)/2)+sqrt(((Jx-Jy)/2)^2+Jxy^2);
J2=((Jx+Jy)/2)-sqrt(((Jx-Jy)/2)^2+Jxy^2);
%úhel do hlavních os
uhel=0.5*atan(abs(2*Jxy/(Jx-Jy)));
```

```

a=[min(polx)-25,max(polx)+25];
%výpis hodnot
fprintf('Hodnoty centrálních kvadratických momentů:\nJy = %d\nJz = %d\n...
Jyz = %d\nJp = %d\nJ1 = %d\nJ2 = %d\n',Jx,Jy,Jxy,Jp,J1,J2);
if Jxy<0
    hlavniosal=tan(uhel)*a+yt-tan(uhel)*xt;
    hlavniosa2=tan(uhel+pi/2)*a+yt-tan(uhel+pi/2)*xt;
    fprintf('Pootočením průřezu proti směru hodinových ručiček o úhel %.1f stupňů...
dostáváme hlavní osy\n',uhel*180/pi);
else
    hlavniosal=-tan(uhel)*a+yt+tan(uhel)*xt;
    hlavniosa2=-tan(uhel+pi/2)*a+yt+tan(uhel+pi/2)*xt;
    fprintf('Pootočením průřezu po směru hodinových ručiček o úhel %.1f stupňů...
dostáváme hlavní osy\n',uhel*180/pi);
end
%vykreslení průřezu s těžištěm a hlavními osami
plot(polx,poly);
axis normal;
osy=axis;
hold on;
plot(xt,yt,'*');
plot(a,hlavniosal,a,hlavniosa2);
axis([osy]);
hold off;

```